**Лекція 9**

**Пряма і площина у просторі**

**9.1. Алгебраїчні поверхні першого порядку**

Рівняння першого порядку з трьома невідомими має вигляд , причому хоча б один з коефіцієнтів А, В, С повинен бути відмінний від нуля. Воно задає в просторі в прямокутній системі координат  алгебраїчну поверхню першого порядку.  
Властивості алгебраїчної поверхні першого порядку багато в чому аналогічні властивостям прямої на площині - геометричному образу рівняння першого порядку з двома невідомими.

**Теорема 9.1.** Будь-яка площина в просторі є поверхнею першого порядку і будь-яка поверхня першого порядку в просторі є площиною.  
**Доведення**. Твердження теореми, та її доказ аналогічні теоремі 7.1. Дійсно, нехай площина  задана своєю точкою  і ненульовим вектором , що перпендикулярний їй. Тоді множина всіх точок у просторі розбивається на три підмножини. Перша складається з точок, що належать площині, а два інших - з точок, розташованих з одного та іншого боку від площини. Якій з цих підмножин належить довільна точка *М* простору, залежить від знака скалярного добутку . Якщо точка *М* належить площині (рис. 9.1, а), то кут між векторами  і  прямій, і

тому їх скалярний добуток дорівнює нулю: .

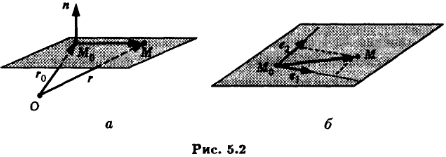


Рис. 9.1.

Якщо точка *М* не належить площині, то кут між векторами  і  гострий або тупий, і тому  або  відповідно, причому знак цього скалярного добутку один і той самий для всіх точок, розташованих з однієї сторони від площини (рис. 9.1, б).  
Позначимо координати точок , *М* і вектора  через  відповідно. Оскільки , то отримуємо умову належності точки *М* розглянутої площині у вигляді:

 (9.1)

Розкриття дужок дає рівняння

,

де  і хоча б один з коефіцієнтів *А, В*, або *С* відмінний від нуля. Це означає, що площина є геометричним образом рівняння , тобто алгебраїчною поверхнею першого порядку.

Провівши доведення першого твердження теореми в зворотному порядку, покажемо, що геометричним образом рівняння  , є площина. Виберемо три числа , що задовольняють цьому рівнянню. Обраним числам відповідає точка , що належить геометричному образу заданого рівняння. З рівності  випливає, що . Підставляючи цей вираз в рівняння, отримуємо , що рівносильно (9.1). Рівність (9.1) можна розглядати як критерій ортогональності векторів  і , де точка *М* має координати (*х; у; z*)*.* Цей критерій виконується для точок площини, що проходить через точку  перпендикулярно вектору  і не виконується для інших точок простору. Отже, рівняння (9.1) є рівнянням в зазначеній площині. ●

Рівняння  називають **загальним рівнянням площини.** Коефіцієнти *А, В, С* ― це координати вектора , що перпендикулярний площині. Його називають **нормальним вектором площини.**За умови відомих координат точки, що належить деякій площині, і ненульового вектора, перпендикулярного їй рівняння площини записується без будь-яких обчислень.  
  
**◄Приклад 9.1.** Знайти загальне рівняння площини, що перпендикулярна радіус-вектору точки  ** та проходить через точку *.*

**Розв’язання**. Оскільки ненульовий вектор 

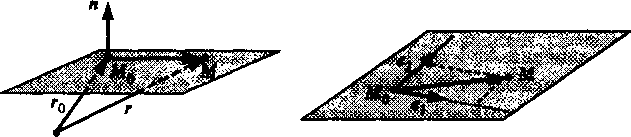
перпендикулярний шуканої площини, то її рівняння має вигляд

, або .►

**9.2. Спеціальні види рівняння площини**

**9.2.1. Векторне і параметричні рівняння площини**

Нехай  і  - радіус-вектори точок та відповідно.  
Тоді , і умову того, що точка належить площині, що проходить через точку перпендикулярно ненульовому вектору  (рис. 9.2, *а*), можна записати за допомогою скалярного добутку у вигляді співвідношення: , (9.2)

яке називають **векторним рівнянням площини**.

*а*) *б*)

Рис. 9.2.

Фіксованій площині в просторі відповідає безліч паралельних їй векторів, тобто простір . Виберемо в цьому просторі базис , тобто пару неколінеарних векторів, паралельних даній площині, і точку  на площині (рис. 9.2.б). Якщо точка  належить площині, то це еквівалентно тому, що вектор  паралельний цій площині, тобто він належить вказаному простору . Це означає, що існує розкладання вектора  в базисі , тобто існують такі числа  і , для яких . Запишемо ліву частину цього рівняння через радіус-вектори  і  точок та відповідно, отримаємо **векторне параметричне рівняння площини**

 **,**. (9.3)

Перейдемо від рівності векторів до рівності їх координат. Позначимо через  координати точок та  і через  координати векторів . Прирівнюючи однойменні координати векторів та , отримаємо **параметричне рівняння площини**

 . (9.4)

**9.2.2. Рівняння площини, що проходить через три точки та рівняння площини у відрізках**

Припустимо, що три точки  не лежать на одній прямій. Тоді існує єдина площина , до якою ці точки належать. Знайдемо рівняння цієї площини, сформулювавши критерій належності довільної точки  даній площині . Потім запишемо цей критерій через координати точок. Зазначеним критерієм є описування площини , як геометричного місця тих точок *М*, для яких вектори  компланарні. Критерієм компланарності трьох векторів є рівність нулю їх змішаного добутку. Змішаний добуток обчислюється за допомогою визначника третього порядку, рядками якого є координати векторів в ортонормова-ному базисі. Тому, якщо  - координати точок , а  ― координати точки , то , ,  і умова рівності нулю змішаного добутку цих векторів має вигляд

 (9.5)

Обчисливши визначник, отримаємо лінійне щодо *x, y, z* рівняння, що є **загальним рівнянням шуканої площини**.

Наприклад, якщо розкласти визначник по 1-му рядку, то отримаємо

****Ця рівність після розкриття дужок перетвориться до загального рівняння площини. Зазначимо, що коефіцієнти при змінних в останньому рівнянні збігаються з координатами векторного добутку . Цей векторний добуток дає ненульовий вектор, перпендикулярний до , тобто її нормальний вектор.

Розглянемо окремий випадок площини, що проходить через три точки. Точки , , не лежать на одній прямій і задають площину, яка відсікає на осях координат відрізки ненульової довжини (рис. 9.3). Тут під "довжинами відрізків" розуміють значення ненульових координат радіус-векторів точок  , *і =* 1,2,3*.*

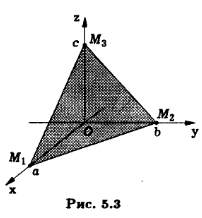


Рис. 9.3.

Оскільки , то рівняння (9.5) набуде вигляду:



Обчисливши визначник, знайдемо: ,

розділимо отримане рівняння на *abc* і перенесемо вільний член в праву частину: **.**

Це рівняння називають **рівнянням площини у відрізках**.

**◄Приклад 9.2.** Знайти загальне рівняння площини, яка проходить через точку з координатами (1; 1, 2) і відсікає від осей координат відрізки однакової довжини.  
**Розв’язання**. Рівняння площини у відрізках за умови, що вона відсікає від осей координат відрізки рівної довжини, скажімо , має вигляд:

**.**

Цьому рівнянню повинні задовольняти координати (1; 1, 2) відомої точки на площині, тобто виконується рівність . Тому  і шукане рівняння: .►

**9.2.3. Нормальне рівняння площини**

Розглянемо деяку площину  в просторі. Зафіксуємо для неї одиничний нормальний вектор , напрямлений з початку координат "в бік площини ", і позначимо через  відстань від початку *О* системи координат до площини  (рис. 9.4). Якщо площина проходить через початок системи координат, то, а в якості напрямку для нормального вектора  можна вибрати будь-яке з двох можливих. Якщо точка *М* належить площині , то це еквівалентно тому, що ортогональна проекція вектора  на напрямок вектора  дорівнює , тобто виконана умова , оскільки довжина вектора  дорівнює одиниці. Позначимо координати точки *М* через (*x*; *у*; *z*) і нехай .

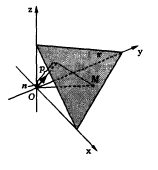


Рис. 9.4. Нормальне рівняння площини.

Скалярний добуток у рівності  в координатній формі задає **нормальне рівняння площини:**

**.**

Загальне рівняння площини в просторі можна перетворити в її нормальне рівняння діленням на нормуючий множник.  
Для рівняння площини *Ах +By +Cz +D =* 0 нормуючим множником є число , знак якого вибирається протилежним знаку *D*. За абсолютною величиною нормуючий множник є довжиною нормального вектора  площини, а знак відповідає потрібному напрямку одиничного нормального вектора площини. Якщо площина проходить через початок системи координат, тобто *D =* 0, то знак нормуючого множника можна вибрати будь-яким.

**9.3. Рівняння прямої в просторі**

**9.3.1. Загальне рівняння прямої в просторі**

Пряму в просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин. Дві площини: , що

непаралельні, перетинаються по прямій. Точка *M* (*x;y;z*) належить цій прямій тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють систему:

 (9.6)

яку називають **загальними рівняннями прямої.**

**9.3.2. Векторне рівняння прямої**

Пряму *L* в просторі можна однозначно задати будь-якою її точкою  і паралельним їй ненульовим вектором .  
Будь-який ненульовий вектор, паралельний прямій, **називають напрямним вектором прямої.**Якщо точка *М* належить прямій *L*, то це еквівалентно тому, що вектор  колінеарен вектору  (рис. 9.5). Оскільки, , то він є базисом в просторі  колінеарних йому векторів. Тому для деякого числа *t* виконується рівність . Оскільки , де  і - радіус-вектори точок і відповідно, то умову  можна записати у вигляді рівняння

, (9.7)

яке називають **векторним рівнянням прямої** в просторі.

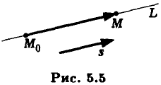


Рис 9.5. Рівняння прямої у просторі

**9.3.3. Параметричні рівняння прямої в просторі**

Припустимо, що відомі координати  напрямного вектора  прямої *L* і точки  в прямокутній системі координат. Позначимо через координати довільної точки *М*.  
Критерієм приналежності точки *М* прямій *L* є умова колінеарності векторів  і  (рис. 9.5), що рівносильно пропорційності їх координат. Позначимо через *t* коефіцієнт пропорційності, отримаємо : .

Але тоді . (9.8)

Це **параметриче рівняння прямої** в просторі. Шість коефіцієнтів у системі рівнянь (8.8) мають наочний геометричний сенс: вони є координатами однієї точки на прямій, що відповідає *t=0*, та координатами напрямного вектора прямої, який з'єднує точки, що відповідають значенням параметра *t=0* та *t=1*.

**9.3.4. Канонічні рівняння прямої в просторі**

З параметричного рівняння прямої можна виключити параметр *t* і записати результат у вигляді:

. (9.9)

Це **канонічне рівняння прямої** в просторі.  
У знаменнику канонічних рівнянь допускається нульове значення.

**9.3.5.** **Рівняння прямої, що проходить через дві точки**

Кожна пряма в просторі однозначно задається будь-якими двома своїми різними точками. Якщо відомі координати цих точок , то в якості напрямного вектора прямої підходить ненульовий вектор . Знаючи його координати і координати точки  на прямій, можна записати канонічне рівняння прямої. В результаті отримаємо

.

Це **рівняння прямої, що проходить через дві точки.**

**◄Приклад 9.3**. Записати рівняння прямої, що проходить через точки  і  .

**Розв’язання.** .

Нуль в знаменнику другого дробу означає, що для координат всіх точок прямої виконано рівність *у = 2*. Тому пряма розташована у площині *у -*2=0, що паралельна координатній площині *хОz* і перетинає вісь ординат у точці з ординатою 2.►

**◄Приклад 9.4**. Знайти координати точки *В*, що симетрична точці

*А* (2; 3; -1)відносно прямої .

**Розв’язання.** В обчисленнях будемо спиратися на наступну геометричну побудову точки *В*: а) через точку *А* проводимо площину , що перпендикулярна прямій *L;* б) знаходимо точку *М*  перетину прямої *L* і площини ; в) відрізок *АМ* продовжуємо до відрізка *АВ* так, щоб точка *М* опинилася в середині відрізка *АВ* (рис. 8.6).

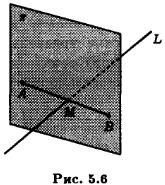


Рис. 9.6. Побудова точки, що симетрична заданій точці відносно прямої

Оскільки площина  перпендикулярна прямій *L*, то в якості нормального вектора  площини можна вибрати напряний вектор прямої *L:* . З відомих координат нормального вектора площини  і точки *А*, що належить їй, записуємо рівняння площини в загальному вигляді: .Щоб знайти координати точки *М* перетину прямої і площини за їх рівнянями, запишемо параметричне рівняння прямої *L*: .

Підставимо ці вирази для координат точки на прямій в рівняння площини, одержимо рівняння для параметра *t*:



розв’язок якого дає значення параметра для точки *М*. Знайдемо: *t =* -4 / 3і підставимо його в параметричне рівняння прямої, отримаємо координати точки перетину прямої і площини:

.

Оскільки ця точка повинна ділити відрізок *АВ* навпіл, її координати рівні напівсумі відповідних координат точок *А* і *В*. Отже, позначивши через  координати точки *В*, отримаємо рівності

.

Звідси: .►

Розглянемо способи переходу від загальних рівнянь до канонічних або параметричних.

**Перший спосіб** полягає в тому, що в системі  для *z* призначають два різних значення та за формулами Крамера знаходять два різних розв’язки системи двох рівнянь з двома невідомими *х* і *у*. Ці два розв’язки дають координати двох різних точок  і  на прямій. А дві відомі точки на прямій дозволяють знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки, яке фактично збігається з канонічними рівняннями прямої.

**Другий спосіб**. В якості напрямного вектора  прямої, що задана загальними рівняннями площин, можна вибрати  - векторний добуток двох нормальних векторів площин (рис. 8.7).

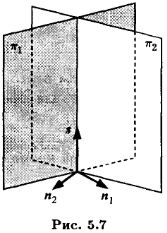


Рис. 9.7

Дійсно, це векторний добуток є вектором, що ортогональний кожному нормальному вектору, а тому він паралельний як одній, так і іншій площині, тобто паралельний їх лінії перетину.

**◄Приклад 9.5.** Знайти канонічне рівняння прямої, що збігається з лінією перетину площин .

**Розв’язання.** Щоб знайти координати деякої точки на прямій, підставляємо в рівняння площин *z =* 0 і розв’яжемо відповідну систему

двох лінійних рівнянь щодо *x* і *у*: .

*х =*1 і *у =* -1.Точка з координатами (1; -1; 0)розташована на прямій.  
В якості напрямного вектора прямої беремо векторний добуток  нормальних векторов площин  і :

.

тобто напрямним вектором прямої буде *.* Знайдений вектор можна замінити колінеарним йому вектором *.*  
Канонічне рівняння шуканої прямої:

.►

**Третій спосіб** переходу від загального рівняння прямої до її канонічного або параметричного рівняння полягає в наступному. Розв’язуємо систему  за правилом Крамера щодо невідомих *х* та *у*, розглядаючи невідоме *z* як параметр:





Позначимо *z* через *t* і додамо рівняння *z = t*, отримаємо параметричні рівняння прямої: .